

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО
ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра высшей математики

**Методические указания к выполнению расчетного задания по теме
«Ряды»
для студентов заочной формы обучения**

Москва 2007

С о с т а в и т е л и

Доцент кандидат физико-математических наук

Титова Т.Н.

Необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Следствие. Достаточное условие расходимости ряда.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n + 2}$.

$$\text{Найдем } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Ряд расходится по достаточному условию расходимости.

Первый признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n > 0 \quad (2)$$

Если для всех n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$,

то из сходимости ряда (2) с большими членами следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) с меньшими членами следует расходимость ряда (2).

Второй признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n > 0$.

Если существует конечный, отличный от 0, предел отношения общих членов этих рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad 0 < k < \infty,$$

то ряды ведут себя одинаково: сходятся или расходятся одновременно.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3 + 3n - 1}{7n^5 - 2n^2 + 4}$$

Общий член ряда
$$u_n = \frac{5n^3 + 3n - 1}{7n^5 - 2n^2 + 4}.$$

Рассмотрим
$$v_n = \frac{5n^3}{7n^5} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{n^2},$$
 оставив в числителе и знаменателе u_n старшие члены.

Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{5}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
 - ряд Дирихле, где $p=2>1$, сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n - 1}{5n^3} \cdot \frac{7n^5}{7n^5 - 2n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{5} \cdot \frac{7}{7 - \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^5}} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, исходный ряд сходится по 2 признаку сравнения.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0$, существует предел отношения

последующего члена ряда к предыдущему при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho > 1$ ряд

расходится, при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho = 1$ требуется провести дополнительное исследование.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Общий член ряда
$$u_n = \frac{n}{3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}.$$
 Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^n \cdot 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$
 следовательно, ряд

сходится.

Радикальный признак Коши.

Рассмотрим ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Пусть существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, при $q = 1$

требуется провести дополнительное исследование.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 4n + 2} \right)^n$

Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 4n + 2} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 4n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{5}{3} > 1.$$

Ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают: $u_n \geq u_{n+1}, n = 1, 2, \dots$

Пусть существует непрерывная невозрастающая функция $f(x)$ на интервале $[1, \infty)$ такая, что $f(n) = u_n, n = 1, 2, \dots$

Тогда несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ и ряд ведут себя одинаково (оба сходятся или оба расходятся).

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

Заменив в общем члене u_n n на x , получим функцию $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$, монотонно

убывающую при $x \in [1, \infty)$. Исследуем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} = \int_1^{\infty} \frac{d \ln(x+1)}{\sqrt{\ln(x+1)}} = 2\sqrt{\ln(x+1)} \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{\ln(x+1)} - 2\sqrt{\ln 2} = \infty,$$

интеграл расходится, следовательно, ряд тоже расходится.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ таков, что ряд, составленный из абсолютных величин

его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то и данный ряд тоже сходится.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n} \quad (1)$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{3^n} \right| \quad (2).$$

Общий член ряда $|u_n| = \frac{|\cos n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} = v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится (геометрическая

прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{3} < 1$). Следовательно, ряд (2) сходится по 1 признаку

сравнения, а ряд (1) сходится абсолютно.

Признак Лейбница.

Если абсолютные величины членов знакопеременующегося ряда $\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, где

$u_n > 0, n = 1, 2, \dots$, монотонно убывают: $u_n > u_{n+1}, n = 1, 2, \dots$,

общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится.

При этом сумма ряда S удовлетворяет неравенству: $|S| \leq u_1$.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^3} \quad (4)$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)^3} \quad (5)$$

Общий член ряда (5) $u_n = \frac{1}{(5n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - ряд Дирихле, $p=3 > 1$, сходится.

Следовательно, ряд (5) сходится по 1 признаку сравнения, ряд (4) сходится абсолютно.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} \quad (6)$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \quad (7)$$

Исследуем ряд (7) по интегральному признаку Коши,

$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ - монотонно убывает на интервале $[1, +\infty)$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \ln |\ln(x+1)| \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |\ln(x+1)| - \ln(\ln 2) = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, ряд (7) расходится. Исследуем ряд (6) на сходимость по признаку Лейбница. Члены ряда (6) монотонно убывают по модулю, так как $y = f(x)$ монотонно убывает,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0.$$

Следовательно, ряд (6) сходится. Так как ряд из абсолютных величин (7) расходится, ряд (6) сходится условно.

Степенные ряды.

Для отыскания интервала сходимости степенного ряда применяют признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}}$$

Общий член ряда из абсолютных величин $|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{|x|^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}},$

$$|u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt[3]{n+4} \cdot 2^{n+2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt[3]{n+4} \cdot 2^{n+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \sqrt[3]{\frac{n+3}{n+4}} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[3]{\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Пусть $\frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, тогда степенной ряд абсолютно сходится по

признаку Даламбера. Пусть $\frac{|x|}{2} > 1$, тогда степенной ряд расходится по признаку

Даламбера. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=2$ имеем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{n+3}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} \quad (8)$$

Ряд (8) - ряд Дирихле при $p = \frac{1}{3} < 1$, расходится.

При $x=-2$ имеем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{\sqrt[3]{n+3} \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}} \quad (9)$$

Ряд (9) – знакочередующийся ряд. Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} > |u_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}} \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} = 0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Ряд, составленный из абсолютных величин ряда (9)

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}} \right| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}},$$

совпадает с рядом (8), который расходится.

Следовательно, ряд (9) сходится условно.

Ответ: область сходимости $[-2, 2)$. При $x = -2$ ряд сходится условно.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Необходимый признак сходимости ряда.	3
Первый признак сравнения.....	3
Второй признак сравнения.	3
Признак Даламбера.	4
Радикальный признак Коши.....	5
Интегральный признак Коши.....	5
Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.....	6
Признак Лейбница.....	6
Степенные ряды.....	7